

基于突变理论的单根锚杆脱黏分析

王 辉^{1,2}, 郭院成¹

(1. 郑州大学 土木工程学院, 河南 郑州 450001; 2. 河南理工大学 土木工程学院, 河南 焦作 454000)

摘 要: 针对工程中单根预应力锚杆的脱黏失效问题, 基于突变理论提出一种研究的新思路。在建立简化力学模型的基础上, 推导出锚固界面的非线性剪切滑移模型; 视预应力锚杆为弹性体, 根据弹性理论得出锚杆的总势能; 引入突变理论, 将锚杆势函数化简为尖点突变模型的标准形式, 构建锚杆失效的临界判据, 并进行脱黏分析。结果表明: 所建非线性剪切滑移模型可以合理考虑锚固界面的软化特性; 拉拔荷载作用下, 锚杆杆体与周围注浆体的界面剪应力分布逐渐演化为单峰曲线, 直至极限状态下整个锚固界面发生软化破坏; 推导出的临界松动位移理论公式简单实用, 可为研究单根预应力锚杆的脱黏失效提供参考。通过对工程算例进行验算分析, 证明所提方法是合理可行的。

关 键 词: 脱黏; 临界松动位移; 预应力锚杆; 突变理论; 势函数

中图分类号: TU 472

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2016)10-2833-06

Debonding analysis of a single anchor using catastrophe theory

WANG Hui^{1,2}, GUO Yuan-cheng¹

(1. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan 450001, China;

2. School of Civil Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000, China)

Abstract: A new method for analyzing the debonding problem of a single prestressed anchor is proposed based on the catastrophe theory. A simplified nonlinear shear slip model of the anchorage interface is proposed. The total potential energy of the anchorage system is obtained using the elastic theory based on the assumption that the anchor is an elastic body. The catastrophe theory is introduced to simplify the energy function of anchor to the normal form of cusp catastrophe model. A failure criterion of anchor is established and the debonding analysis is conducted. The results show that the softening behavior of the anchorage interface can be reasonably described by the established nonlinear shear slip model. The distribution of the shear stress between the rod body and the surrounding grout gradually evolves into a single peak curve with the increasing drawing load, and the whole anchorage interface softens until damages occur at the ultimate state. The proposed theoretical formula for critical loose displacement is simple and practical and may provide theoretical tools for analyzing the debonding of a single prestressed anchor. Finally, the rationality and feasibility of the method proposed is also examined through an engineering project.

Keywords: debonding; critical loose displacement; prestressed anchor; catastrophe theory; potential function

1 引 言

相关研究^[1]表明, 若不考虑筋体自身断裂, 岩层介质中的锚杆, 主要是灌浆体与筋体接触界面上的破坏; 土层介质中的锚杆, 主要是灌浆体与周围土层之间的脱黏。因此, 研究锚杆的破坏问题, 不管是岩层还是土层, 首先要确定的是锚固段的剪应力分布规律。现有规范^[2]为简化计算, 规定锚固段

的剪应力沿杆长呈均匀分布, 实践证明, 这是一种极为粗糙的假设; 20 世纪 70 年代, Evangelista 等^[3-4]通过黏土中的锚杆试验, 得出锚杆表面摩阻力沿杆长呈非均匀分布的重要结论; 张季如等^[5]通过建立荷载传递的双曲线模型, 得到锚杆表面摩阻力与剪切位移呈非线性关系的结论; 何思明^[6]、尤春安^[7]、邹金峰^[8]等通过理论分析、数值模拟等研究手段对摩阻力与剪切位移的非线性分布规律进行了深入探

收稿日期: 2016-06-12

基金项目: 河南理工大学青年基金(No. 672511/118)。

This work was supported by the Youth Fund Project of Henan Polytechnic University (672511/118).

第一作者简介: 王辉, 女, 1980 年生, 博士, 讲师, 研究方向为基坑支护。E-mail: wanghui9962@hpu.edu.cn

通讯作者: 郭院成, 男, 1965 年生, 博士, 教授, 博导, 研究方向为基坑支护工程。E-mail: guoyuancheng@163.com

讨并得出了一些有益的结论。但对于工程中常见的单根预应力锚杆的脱黏失效问题尚需进一步探讨。

本文在建立简化力学模型与势函数的基础上,通过引入尖点突变模型,对单根预应力锚杆进行脱黏分析。通过对工程算例进行验算分析,证明所提方法是合理有效的。

2 力学模型的建立

图1为岩土体中预应力锚杆的锚固微元体受力示意图^[9],考虑为锚杆杆体与注浆体接触界面的破坏。

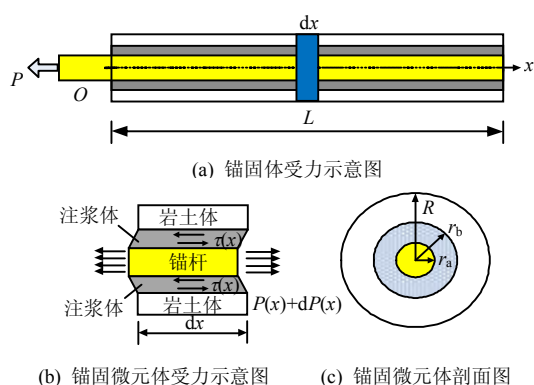


图1 锚杆锚固微元体受力示意图
Fig.1 Diagram of forces on anchor element

从图1可以得出:

$$dP(x) + C\tau(x)dx = 0 \quad (1)$$

$$P(x) = E_a A_a \varepsilon_a(x) = -E_a A_a \frac{du_a(x)}{dx} \quad (2)$$

$$P(x) = \frac{s(x)}{\kappa s(x) + \alpha} \quad (3)$$

式(1)~(3)中: $P(x)$ 为坐标 x 处的抗拔力(kN); $\tau(x)$ 为坐标 x 处的剪应力(kPa); $s(x)$ 为坐标 x 处锚杆杆体与周围注浆体之间的相对位移(m); $u_a(x)$ 为坐标 x 处锚杆杆体的轴向位移(m); $\varepsilon_a(x)$ 为坐标 x 处锚杆杆体的轴向应变; E_a 为锚杆杆体的弹性模量(MPa); A_a 为锚杆杆体的截面积(m^2); C 为锚杆杆体的周长(m); α 、 κ 为常数^[10]。

由荷载传递法可知,对于弹性工作阶段,张拉荷载作用下 $s(x) = u_a(x)$ 。

由于 $P(x)$ 和 $s(x)$ 均为坐标 x 的函数关系式,则联立式(1)~(3),可得

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{\alpha s}{-E_a A_a (\kappa s + \alpha)^3} \quad (4)$$

将式(4)代入式(1),可得

$$\tau(x) = \frac{\alpha}{CE_a A_a} \cdot \frac{s(x)}{[\kappa s(x) + \alpha]^3} \quad (5)$$

即得:

$$\tau(s) = \frac{\alpha}{CE_a A_a} \cdot \frac{s}{[\kappa s + \alpha]^3} \quad (6)$$

式(6)两端对 s 求导,并令 $\tau'(s) = 0$,可得锚杆杆体与注浆体界面的最大剪切位移 $s_m = \frac{\alpha}{2\kappa}$,代入式(5),即可得

$$\tau_{ult} = \frac{1}{CE_a A_a} \cdot \frac{4}{27\alpha\kappa} \quad (7)$$

式中: τ_{ult} 为锚杆杆体与注浆体界面的抗剪强度(kPa)。

定义 K 为锚杆杆体与注浆体界面的综合剪切刚度系数,即在单位长度锚固界面上单位剪切位移所产生的剪应力,则有

$$K = Ck_{ini} = C \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{\alpha^2 E_a A_a} \quad (8)$$

式中: k_{ini} 为锚杆杆体的初始刚度。

联立式(7)、(8),可得

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{KE_a A_a}} \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{4}{27C\tau_{ult}} \sqrt{\frac{K}{E_a A_a}} \quad (10)$$

K 和 τ_{ult} 可通过理论计算获得,则 α 和 κ 可由式(9)、(10)得到。

将式(9)、(10)代入式(5)中,可得锚固界面非线性剪切滑移模型为

$$\tau = \frac{Ks}{C} \left(\frac{4Ks}{27C\tau_{ult}} + 1 \right)^{-3} \quad (11)$$

将式(11)代入 $\frac{d^2 u_a(x)}{dx^2} = \frac{4\tau(x)}{E_a D}$ 中,其中, D

为锚杆杆体直径(m),同时考虑 $s(x) = u_a(x)$,可得锚杆荷载传递的非线性微分方程为

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = \frac{Ks(x)}{E_a A_a} \left[\frac{4Ks(x)}{27C\tau_{ult}} + 1 \right]^{-3} \quad (12)$$

式中: K 、 C 和 τ_{ult} 均为常数。

令

$$A = \frac{K}{E_a A_a} \quad (13)$$

$$B = \frac{4K}{27C\tau_{ult}} \quad (14)$$

则式 (12) 可改写为

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = \frac{As(x)}{[Bs(x)+1]^3} \quad (15)$$

假设锚杆足够长, 则锚杆尾部的轴力及位移均为 0, 即

$$\left. \begin{aligned} P(x)|_{x=L} &= 0 \\ s(x)|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

令 $T(s) = \frac{ds(x)}{dx}$, 则有

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = \frac{d[T(s)]}{dx} = \frac{dT(s)}{ds} \frac{ds(x)}{dx} = T \frac{dT}{ds} \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (15), 同时对等式两边对 s 积分, 可得

$$T^2 = \frac{A}{2} \left[\frac{s^2}{(Bs+1)^2} + C_1 \right] \quad (18)$$

考虑边界条件式 (16), 可知

$$C_1 = 0 \quad (19)$$

将式 (19) 代入式 (18), 同时等式两边开方, 可得

$$\frac{ds(x)}{dx} = \sqrt{\frac{A}{2} \left[\frac{s(x)}{Bs(x)+1} \right]} \quad (20)$$

根据分离变量法, 可求得式 (20) 的通解为

$$Bs(x) + \ln s(x) = \sqrt{\frac{A}{2}} x + C_2 \quad (21)$$

式中: C_2 为积分常数。

联立式 (2)、(20), 可得

$$P(x) = -E_a A_a \sqrt{\frac{A}{2} \left[\frac{s(x)}{Bs(x)+1} \right]} \quad (22)$$

将式 (22) 代入式 (21), 可得

$$\ln \left\{ -P(x) / [E_a A_a \sqrt{\frac{A}{2} + BP(x)}] \right\} - B \cdot \quad (23)$$

$$P(x) / [E_a A_a \sqrt{\frac{A}{2} + BP(x)}] = \sqrt{\frac{A}{2}} x + C_2$$

考虑荷载边界条件:

$$P(x)|_{x=0} = P \quad (24)$$

将式 (24) 代入式 (23), 即可求出

$$C_2 = \frac{-BP}{E_a A_a \sqrt{\frac{A}{2} + BP}} + \ln \frac{-P}{E_a A_a \sqrt{\frac{A}{2} + BP}} \quad (25)$$

3 势函数的建立

从能量观点来讲, 基坑开挖支护过程中, 预应力锚杆积累了一定量的形变势能与外力势能, 当这些能量达到临界状态时, 任何微小的扰动即可引起整个支护体系的失稳。以岩土体中预应力锚杆的锚固段为分析对象, 如图 2 所示。

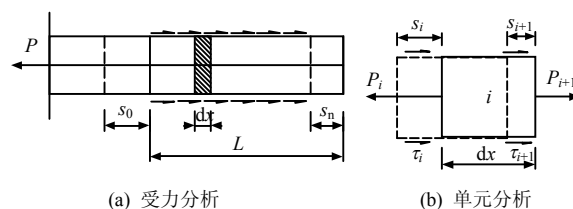


图 2 锚杆单元计算示意图

Fig.2 Calculation diagram of anchor unit

在顶端受到拉力 P 之后, 锚杆杆体与注浆体之间出现相对位移, 由此产生的剪应力用以抵抗外加荷载 P 。相对位移沿锚杆杆体长度的分布并不均匀, 设锚杆杆体顶端位移为 s_0 , 底端位移为 s_n , 中间任一点的位移为 s_i , 则有

$$s_0 = s_n + \sum_{i=1}^{n-1} s_i \quad (26)$$

由文献[11]可知, 整个预应力锚杆的能量方程为

$$\Delta \Pi = \Delta U + \Delta V = -Ps_0 + \frac{P^2 L_f}{2E_a A_a} \quad (27)$$

$$C \int_0^L \tau_x s_x dx + \frac{1}{2} E_a A_a \int_0^L \left(\frac{ds_x}{dx} \right)^2 dx$$

式中: L_f 为锚杆杆体自由段长度 (m)。

将式 (6)、(20) 代入式 (27), 可得预应力锚杆的势函数如下:

$$\Delta \Pi = \frac{E_a A_a}{4} \int_0^L \frac{As^2}{(Bs+1)^2} dx + \frac{P^2 L_f}{2E_a A_a} + \int_0^L \left[\frac{1}{E_a A_a} \cdot \frac{\alpha s^2}{(\kappa s + \alpha)^3} \right] dx - Ps_0 \quad (28)$$

4 预应力锚杆的突变分析

限于篇幅, 有关突变理论的相关介绍在此不再

赘述, 具体内容参考文献[12]。以锚杆杆体与注浆体之间的相对位移 s 为状态变量, 锚杆顶端轴力 P 和锚固长度 L 为控制变量, 将预应力锚杆体系的势函数转化为

$$V = \frac{AE_a A_a L}{4} \frac{s^2}{(Bs+1)^2} - Ps_0 + \frac{L}{E_a A_a} \cdot \frac{\alpha s^2}{(\kappa s + \alpha)^3} + \frac{P^2 L_f}{2E_a A_a} \quad (29)$$

联立式 (9)、(10)、(13)、(14), 可得

$$A = \frac{1}{\alpha^2 E_a A_a^2} \quad (30)$$

$$B = \frac{\kappa}{\alpha} \quad (31)$$

将式 (30)、(31) 代入式 (29), 得

$$V = \frac{P^2 L_f}{2E_a A_a} - Ps_0 + \frac{L(\kappa s^3 + 5\alpha s^2)}{4E_a A_a (\kappa s + \alpha)^3} \quad (32)$$

将式 (32) 的左右两边同时对 s 求导, 并令 $V' = 0$, 得到预应力锚杆稳定性分析的平衡曲面方程 M 为

$$V' = \frac{\alpha L}{2E_a A_a} \left[\frac{5\alpha s - \kappa s^2}{(\kappa s + \alpha)^4} \right] = 0 \quad (33)$$

进而可以求得

$$V'' = \frac{\alpha L [2\kappa^2 s^2 - 17\alpha \kappa s + 5\alpha^2]}{2E_a A_a (\kappa s + \alpha)^5} \quad (34)$$

$$V''' = \frac{-3\alpha \kappa L [\kappa^2 s^2 - 12\alpha \kappa s + 7\alpha^2]}{E_a A_a (\kappa s + \alpha)^6} \quad (35)$$

根据平衡曲面的光滑性质, 可求得尖点, 即尖点处有 $V''' = 0$, 则

$$s^* = (6 \pm \sqrt{29}) \frac{\alpha}{\kappa} \quad (36)$$

定义 s^* 为锚杆杆体与注浆体界面的临界松动位移, 即岩土体中锚固界面发生脱黏松动时的临界剪切位移。

由前分析可知, 预应力锚杆杆体与周围注浆体界面的最大剪切位移为 $s_m = \frac{\alpha}{2\kappa}$ 。对于式 (36),

若取 $s_1^* = (6 + \sqrt{29}) \frac{\alpha}{\kappa}$, 此时 $s^* \approx 22.77 s_m$, 说明达到最大剪切位移之后较长时间段内, 预应力锚杆在极大的拉拔作用下才发生脱黏, 与工程实际不甚相符;

若取 $s_2^* = (6 - \sqrt{29}) \frac{\alpha}{\kappa}$, 此时 $s^* \approx 1.23 s_m$, 说明达到最大剪切位移之后不久即发生锚杆的脱黏破坏, 符合工程实际。因此, 取 $s^* = (6 - \sqrt{29}) \frac{\alpha}{\kappa}$ 。

把平衡曲面方程 $V' = 0$ 在尖点坐标 s^* 处展开为泰勒级数, 并截取至 3 次项, 得

$$\frac{V^{(4)}(s^*)(s^*)^3}{6} \left[\left(\frac{s-s^*}{s^*} \right)^3 + \left(\frac{s-s^*}{s^*} \right) \right] + \frac{6V''(s^*)}{V^{(4)}(s^*)(s^*)^2} + \frac{6V'(s^*)}{V^{(4)}(s^*)(s^*)^3} = 0 \quad (37)$$

又求得

$$V^{(4)} = \frac{6\alpha \kappa^2 L [2\kappa^2 s^2 - 31\kappa s \alpha + 27\alpha^2]}{E_a A_a (\kappa s + \alpha)^7} \quad (38)$$

将式 (34)、(35)、(38) 代入式 (37) 中, 可得

$$\left(\frac{s-s^*}{s^*} \right)^3 + \left[\frac{(\kappa s^* + \alpha)^2}{2(s^*)^2 \kappa^2} \frac{2\kappa^2 (s^*)^2 - 17\kappa s^* \alpha + 5\alpha^2}{2\kappa^2 (s^*)^2 - 31\kappa s^* \alpha + 27\alpha^2} \right] \left(\frac{s-s^*}{s^*} \right) + \frac{(\kappa s^* + \alpha)^3}{2(s^*)^3 \kappa^2} \frac{-\kappa (s^*)^2 + 5\alpha s^*}{2\kappa^2 (s^*)^2 - 31\kappa s^* \alpha + 27\alpha^2} = 0 \quad (39)$$

对照尖点突变模型的标准形式 $x^3 + Mx + N = 0$, 则有

$$x = \frac{s-s^*}{s^*} \quad (40)$$

$$M = \frac{(\kappa s^* + \alpha)^2 [2\kappa^2 (s^*)^2 - 17\kappa s^* \alpha + 5\alpha^2]}{2(s^*)^2 \kappa^2 [2\kappa^2 (s^*)^2 - 31\kappa s^* \alpha + 27\alpha^2]} \quad (41)$$

$$N = \frac{(\kappa s^* + \alpha)^3 [-\kappa (s^*)^2 + 5\alpha s^*]}{2(s^*)^3 \kappa^2 [2\kappa^2 (s^*)^2 - 31\kappa s^* \alpha + 27\alpha^2]} \quad (42)$$

式中: 参数 x 为系统的状态变量; 参数 M 、 N 为系统的控制变量。

分叉集方程为

$$\Delta = 4M^3 + 27N^2 = 0 \quad (43)$$

将式 (41)、(42) 代入式 (43), 可得

$$\frac{[2\kappa^2 (s^*)^2 - 17\kappa s^* \alpha + 5\alpha^2]^3}{\kappa^2 [2\kappa^2 (s^*)^2 - 31\kappa s^* \alpha + 27\alpha^2]} + \frac{27}{2} [-\kappa (s^*)^2 + 5\alpha s^*]^2 = 0 \quad (44)$$

根据突变原理, 只有当 $M \leq 0$, 系统才能跨越分叉集发生突变, 则锚固体沿软弱面滑动突变失稳的充要力学条件为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2\kappa^2(s^*)^2 - 17\kappa s^* \alpha + 5\alpha^2}{2\kappa^2(s^*)^2 - 31\kappa s^* \alpha + 27\alpha^2} < 0 \\ & \frac{[2\kappa^2(s^*)^2 - 17\kappa s^* \alpha + 5\alpha^2]^3}{\kappa^2[2\kappa^2(s^*)^2 - 31\kappa s^* \alpha + 27\alpha^2]} + \frac{27}{2} \cdot \\ & [-\kappa(s^*)^2 + 5\alpha s^*]^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

5 算例分析

以文献[9, 13]的工程算例作为验算对象, 其中锚杆杆体的直径 $D_a=30$ mm, 弹性模量 $E_a=210$ GPa。假定锚杆杆体与注浆体的界面参数为 $K=5.0$ GPa, $\tau_{ult}=2.0$ MPa, 则剪应力 τ 与剪切位移 s 的关系曲线如图 3 所示。

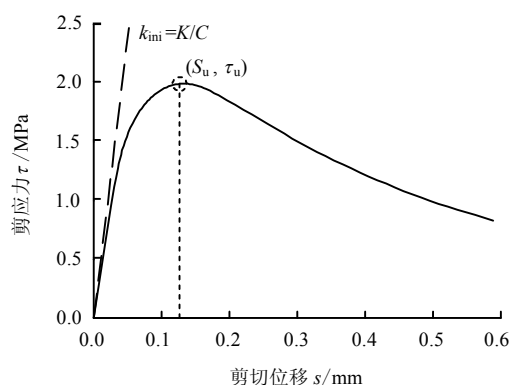


图 3 锚固界面剪应力与剪切位移的关系曲线
Fig.3 Relationship between shear stress and shear displacement on anchorage interface

由图 3 可以看出, $\tau-s$ 关系曲线存在峰值点 (s_u, τ_u) , 且当 $s \leq s_u$ 时, τ 与 s 呈非线性递增关系; 当 $s \geq s_u$ 时, τ 与 s 呈非线性递减关系。因此, 本文所建立的非线性剪切滑移模型可以合理考虑锚固界面的软化特性。

将已知条件代入式 (9)、(10), 可得 $\alpha=1.16 \times 10^{-9}$, $\kappa=4.56 \times 10^{-6}$ 。

因此, 峰值点剪切位移 $s_u=0.127$ mm, 临界松动位移 $s^*=0.156$ mm。

当 $s(x) \rightarrow \infty$ 时, 对应的锚杆拉拔荷载 $P(x)$ 达到极限荷载, 此时 $P_{ult}=219$ kN。

当 $s(x)=s_u=0.127$ mm 时, 对应的锚杆拉拔荷载 $P(x)$ 为软化荷载, 此时 $P_s=73$ kN。

根据极限荷载 P_{ult} 和软化荷载 P_s , 采用 QFZ100-20 型张拉千斤顶与手摇高压油泵对锚杆施加拉拔力, 试验采用分级施加荷载的方法, 分别

选取锚杆张拉荷载为 36、73、110、146、183、201、219 kN。每级稳定后施加下一级荷载, 并用百分表记录对应的位移量。

锚杆拉拔试验获得的荷载-位移曲线及按本文方法计算的理论荷载-位移曲线如图 4 所示。

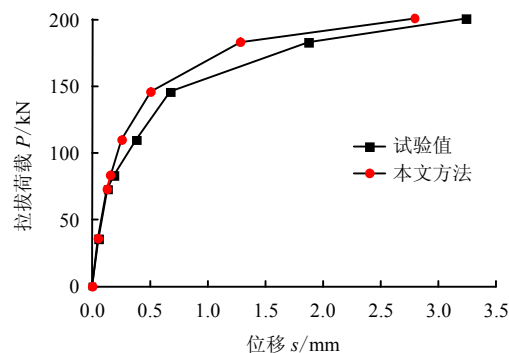


图 4 预应力锚杆的 $P-s$ 曲线
Fig.4 $P-s$ curves for prestressed anchor

由图 4 可以看出, 当拉拔荷载较小时, 曲线呈线性变化; 随着荷载的增大, 约在 $P=83.36$ kN 位置曲线开始向位移轴偏转, 变形速率增大, 界面发生松动, 此时锚杆杆体与周围注浆体的相对位移约为 0.187 mm, 接近本文计算值 s^* 。因此, 计算结果符合工程实际, 说明本文方法具有一定的实用性。

6 结 论

本文基于锚杆荷载-位移关系模型, 通过引入突变理论对单根预应力锚杆的脱黏失效问题展开研究, 主要结论如下:

(1) 考虑预应力锚杆的锚固效应, 将其视为理想弹性体建立势函数, 包括形变势能 ΔU 和外力势能 ΔV 两部分 (预应力锚杆的倾角通常较小, 忽略重力做功)。

(2) 考虑预应力锚杆破坏的突发性和瞬时性, 引入突变理论, 将势函数简化为尖点突变模型的标准形式, 得到锚固体沿软弱面滑动突变失稳的充要力学条件。

(3) 基于突变理论推导出预应力锚杆脱黏松动时的临界剪切位移, 与工程算例的拉拔试验结果比较吻合。

(4) 所提方法基于单根预应力锚杆的脱黏失效问题, 对于群锚, 尚需进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 汉纳 T H. 锚固技术在岩土工程中的应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1986.

- HANNER T H. Application of anchorage technology to geotechnical engineering[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1986.
- [2] 中冶集团建筑研究总院. CECS22-2005 岩土锚杆(索)技术规程[S]. 北京: 中国计划出版社, 2005.
- Building Research Institute of China Metallurgical Group. CECS22-2005 Technical specification for ground anchors[S]. Beijing: China Planning Press, 2005.
- [3] EVANGELISTA A, SAPIO G. Behavior of ground anchors in stiff clays[C]//Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Tokyo: The Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1977: 39—47.
- [4] OSTERMAYER H, SCHEELE F. Research on ground anchors in noncohesive soil[C]//Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Tokyo: The Japanese Society of Soil Mechanics Engineering, 1977: 92—97.
- [5] 张季如, 唐保付. 锚杆荷载传递机理分析的双曲线函数模型[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(2): 188—192.
- ZHANG Ji-ru, TANG Bao-fu. Hyperbolic function model to analyze load transfer mechanism on bolts[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(2): 188—192.
- [6] 何思明, 张小刚, 王成华. 预应力锚索的非线性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(9): 1535—1541.
- HE Si-ming, ZHANG Xiao-gang, WANG Cheng-hua. Nonlinear analysis on prestressed cable[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(9): 1535—1541.
- [7] 尤春安, 战玉宝. 预应力锚索锚固段的应力分布规律及分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(6): 925—928.
- YOU Chun-an, ZHAN Yu-bao. Distributing characters and analysis of stresses in prestressed cables[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(6): 925—928.
- [8] 邹金峰, 李亮, 杨小礼, 等. 基于损伤理论的全长式锚杆荷载传递机理研究[J]. 铁道学报, 2007, 29(6): 84—88.
- ZOU Jin-feng, LI Liang, YANG Xiao-li, et al. Study on load transfer mechanism for span-type anchor based on damage theory[J]. **Journal of the China Railway Society**, 2007, 29(6): 84—88.
- [9] 黄明华, 周智, 欧进萍. 全长黏结式锚杆锚固段荷载传递机制非线性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(增刊 2): 3992—3997.
- HUANG Ming-hua, ZHOU Zhi, OU Jin-ping. Nonlinear analysis on load transfer mechanism of wholly grouted anchor rod along anchoring section[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2014, 33(Supp. 2): 3992—3997.
- [10] 应志民, 张洁, 尚岳全. 锚杆荷载-位移曲线的指数函数模型研究[J]. 岩土力学, 2005, 26(8): 1331—1334.
- YING Zhi-min, ZHANG Jie, SHANG Yue-quan. Exponential model for simulating load-displacement curve of anchor rod[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(8): 1331—1334.
- [11] 王辉, 郭院成, 魏艳卿. 基于简化模型的预应力锚杆复合土钉支护体系能量方程的建立[J]. 铁道建筑, 2015, (9): 82—85.
- WANG Hui, GUO Yuan-cheng, WEI Yan-qing. Establishment of energy equation for composite support system of prestressed anchors and soil nails based on simplified model[J]. **Railway Engineering**, 2015, (9): 82—85.
- [12] 何平, 赵子都. 突变理论及其应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1989.
- HE Ping, ZHAO Zi-du. Catastrophe theory and its application[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1989.
- [13] 朱训国. 地下工程中注浆岩石锚杆锚固机理研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2006.
- ZHU Xun-guo. The reinforcement mechanics of fully grouted rock bolt in underground engineering[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006.